10 класс

Задача 1. Катапульта

Дальность полёта шарика, выпущенного из катапульты под углом φ, равна

$$L = \frac{v_0^2}{g} 2\sin\varphi\cos\varphi = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\varphi. \quad (6)$$

Так как шарики, имеющие одинаковую начальную скорость, попадают в одну и ту же точку, углы φ_1 и φ_2 относительно горизонта, под которыми их выпускают, удовлетворяют условию $2\varphi_1 = 180° - 2\varphi_2$, что эквивалентно выражению:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 90° \quad (7).$$

Векторы их начальных скоростей направлены симметрично относительно луча, образующего угол 45° с горизонтом (рис. 17). Время, в течение которого оба шарика находятся в полете, определяется временем полета нижнего шарика (верхний шарик летит дольше):

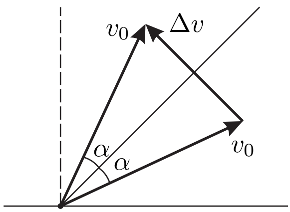

Рис. 17

$$t_{\text{п}} = \frac{2v_0\sin(45° - \alpha)}{g}. \quad (8)$$

Перейдём в систему отсчета, начало координат которой совпадает с нижним шариком, а ориентация осей в пространстве неизменна в течение всего полёта. В этой системе отсчёта верхний шарик движется равномерно и прямолинейно со скоростью

$$\Delta v = 2v_0\sin\alpha. \quad (9)$$

За время $t_{\text{п}}$ он успеет удалиться на расстояние

$$L = \Delta v t_{\text{п}} = \frac{4v_0^2}{g}\sin\alpha\sin(45° - \alpha) = \frac{2v_0^2}{g}(\cos(2\alpha - 45°) - \cos 45°). \quad (10)$$

Максимум этого выражения достигается при $\cos(2\alpha - 45°) = 1$, то есть когда $\alpha = 22{,}5°$. Значит,

$$L_{\max} = \frac{2v_0^2}{g}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Откуда начальная скорость равна

$$v_0 = \sqrt{\frac{L_{\max}\, g}{2 - \sqrt{2}}} = 18 \text{ м/с}.$$

Задача 2. Катушка с проводом

Решение 1.

Пусть R — внешний радиус катушки, r — внутренний радиус, μ — коэффициент трения между стержнем и катушкой, $\vec{Q}$ — полная реакция опоры, которую можно представить как сумму силы нормальной реакции опоры $\vec{N}$ и силы трения скольжения $\vec{F_{\text{тр}}}$ ($\vec{Q} = \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N}$).

На рисунках 18 и 19 показаны силы, действующие на катушку в процессе ее равномерного разматывания под действием силы F.

Заметим, что между внутренней поверхностью катушки и стержнем будет действовать сила трения, причём отношение модулей сил $F_{\text{тр}}$ и Q зависит только от коэффициента трения, но не от силы F. Отсюда

$$\frac{F_{\text{тр}1}}{F_{\text{тр}2}} = \frac{Q_1}{Q_2}.$$

Из равенства моментов сил относительно центра катушки

$$FR = F_{\text{тр}}r.$$

получаем

$$\frac{F_{\text{тр}1}}{F_{\text{тр}2}} = \frac{F_1}{F_2}.$$

Заметим также, что

$$Q_1 = F_1 + P,$$

и,

$$Q_2 = \sqrt{F_2^2 + P^2}.$$

Решив полученную систему уравнений, найдём

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{F_1 + P}{\sqrt{F_2^2 + P^2}}.$$

откуда получаем искомую массу:

$$m = \frac{2F_1F_2^2}{g(F_1^2 - F_2^2)}.$$

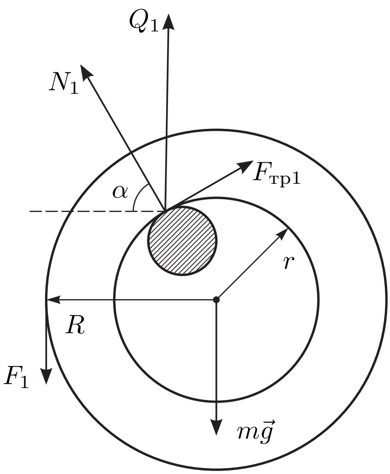

Рис. 18

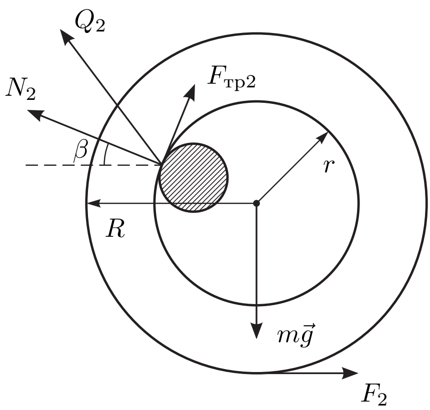

Рис. 19

Решение 2 («в лоб»). Пусть α — угол между направлением силы N_1 и горизонталью. Условие равенства нулю равнодействующей всех сил в проекции на горизонтальную ось имеет вид:

$$\mu N_1 \sin\alpha – N_1 \cos\alpha = 0 \tag{11}$$

а в проекции на вертикальную ось

$$N_1 \sin\alpha + \mu N_1 \cos\alpha = P + F_1. \tag{12}$$

Условие равенства моментов сил относительно центра катушки имеет вид:

$$\mu N_1 r = F_1 R. \tag{13}$$

Возведем (11) и (12) в квадрат и сложим их:

$$N_1^2 + (\mu N_1)^2 = (P + F_1)^2. \tag{14}$$

Рассмотрим случай, когда нить тянут горизонтально (рис. 19) . Обозначим символом β угол между силой реакцией опоры N_2 и горизонталью. Уравнения аналогичные (11) — (14) для второго случая принимают вид

$$\mu N_2 \sin\beta + N_2 \cos\beta = P, \tag{15}$$

$$N_2 \sin\beta - \mu N_2 \cos\beta = F_2, \tag{16}$$

$$\mu N_2 r = F_2 R.$$

Аналогично решая полученную систему уравнений (15) и (16), найдем:

$$N_2^2 + (\mu N_2)^2 = P^2 + F_2^2. \tag{17}$$

Делим уравнение (14) на (17) и получаем:

$$\frac{(P + F_1)^2}{P^2 + F_2^2} = \frac{N_1^2}{N_2^2} = \frac{F_1^2}{F_2^2},$$

откуда следует ответ:

$$m = \frac{2F_1F_2^2}{g(F_1^2 - F_2^2)}.$$

Примечание: формально одним из решений является $P = 0$, однако тогда равнодействующая силы реакции и силы трения должна быть противоположна силе F_1 и направлена по той же прямой. Это возможно только в том случае, если $R = r$.

Задача 3. Охлаждение гелия

Согласно первому закону термодинамики $Q = \Delta U + A$. Работу газа на начальном этапе охлаждения найдём, вычислив площадь под графиком (рис. 20):

$$A = -\frac{1}{2}(P_0V_0 - P_1V_1) = -\frac{1}{2}(RT_0 - RT_1) = \frac{R}{2}\Delta T.$$

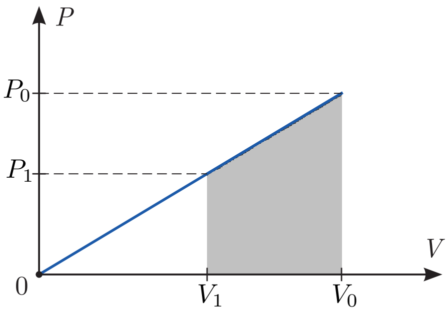

Рис. 20

Следовательно, в начале процесса охлаждения теплоёмкость равнялась:

$$C = \frac{\delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U + \delta A}{\Delta T} = C_V + \frac{R}{2} = 2R.$$

Следовательно, теплоемкость рассматриваемого процесса

$$C = 2R\frac{T}{T_0}. \tag{18}$$

Работа газа будет отрицательной до тех пор, пока газ не примет минимальный объем (точка C на рисунке 21). В этой точке $\Delta V = 0$, а значит теплоёмкость

$$C = C_V + P\frac{\Delta V}{\Delta T} = C_V = \frac{3}{2}R. \tag{19}$$

Приравняв (19) к (18), найдём температуру T_c, при которой объём газа достигает своего минимума:

$$T_c = \frac{3}{4}T_0.$$

Так как суммарная работа газа равна нулю, то положительная работа A_+ (площадь под участком CX графика) равна по модулю отрицательной работе A_- (площади под участком OC графика). Найдём искомую работу газа, воспользовавшись первым законом термодинамики: $Q_{OC} = \Delta U + A_{OC}$, где Q_{OC} — тепло, полученное газом на участке OC. Его найдём как площадь под графиком $C(T)$. Поскольку график линейный

$$Q_{OC} = -\frac{2R}{T_0}\frac{T_0^2 - T_c^2}{2} = -\frac{7}{16}RT_0.$$

Изменение внутренней энергии на этом же участке:

$$\Delta U = U_c - U_0 = C_V(T_c - T_0) = -\frac{3}{8}RT_0,$$

откуда $A_{OC} = Q_{OC} - \Delta U = -\dfrac{RT_0}{16}$. Искомая работа $A_{CX} = -A_{OC} = \dfrac{RT_0}{16}$.

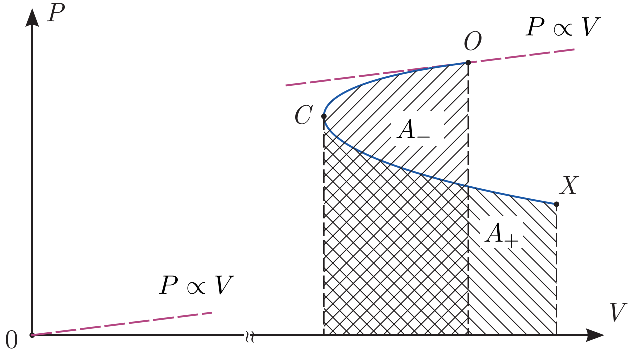

Рис. 21

Найдём температуру T_x, при достижении которой работа становится равной нулю:

$$A = Q - \Delta U = \frac{2R}{T_0}\frac{T_x^2 - T_0^2}{2} - C_V(T_x - T_0) = \frac{R}{T_0}(T_x - T_0)(T_x + T_0 - \frac{3}{2}T_0),$$

откуда $T_x/T_0 = 1/2$.

Задача 4. Источник стабильности

Пусть I — сила тока в резисторе R, J — сила тока в резисторе r, q — заряд, протекший через резистор R после замыкания ключа (заряд конденсатора). За достаточно малое время, для которого изменением напряжения на резисторе R можно пренебречь, выделившееся на резисторе тепло равно произведению этого напряжения на протекший заряд:

$$\delta Q = U\Delta q = IR\Delta q.$$

Отсюда следует, что полное тепло численно равно умноженной на R площади под графиком зависимости силы тока I через резистор R от протекшего через него заряда q. Найдём эту зависимость. Из уравнений

$$I_0 = I + J, \qquad Jr = IR + \frac{q}{C},$$

получаем

$$I_0 r = I(r+R) + \frac{q}{C}.$$

Таким образом, график зависимости $I(q)$ представляет собой прямую, пересекающую оси в точках $(I_0 r)/(r+R)$ и $CI_0 r$.Площадь под этим графиком

$$S = \frac{1}{2} I_0 \frac{r}{r+R} CI_0 r = \frac{CI_0^2 r^2}{2(r+R)}.$$

Отсюда находим ответ

$$Q = SR = \frac{CRI_0^2 r^2}{2(r+R)}.$$

Задача 5. Разойдутся или нет?

Из второго закона Ньютона найдём ускорение точки массы m

$$a_1 = -k\frac{q^2}{mr^2} + \frac{qE}{m}$$

и ускорение точки массы M

$$a_2 = k\frac{q^2}{Mr^2} + \frac{qE}{M}.$$

Здесь r — расстояние между точками, $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$, за положительное выбрано направление от m к M. Найдём относительное ускорение точек:

$$a_{\text{отн}} = a_2 - a_1 = k\frac{q^2}{r^2}\frac{M+m}{Mm} - qE\frac{M-m}{Mm}.$$

Таким же уравнением описывается движение точечного заряда q массой $\mu = (M+m)/(Mm)$, находящегося в поле неподвижного точечного заряда q и в однородном поле $-E_1 = -E(M-m)/(M+m)$. Будем рассматривать эту эквивалентную задачу. Потенциальная энергия заряда:

$$U(r) = k\frac{q^2}{r} + qE_1 r.$$

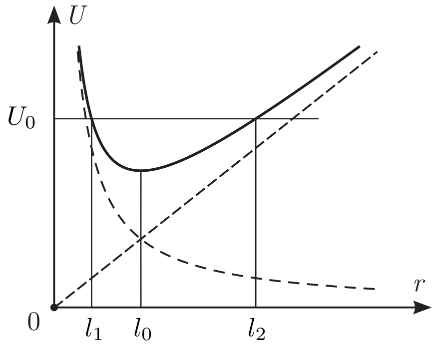

Рис. 22

Из графика зависиимости $U(r)$ (рис. 22) видим, что движение заряда происходит в ограниченной области $l_1 \leqslant r \leqslant l_2$, l_1 и l_2 — корни уравнения

$$U_0 = k\frac{q^2}{r} + qE_1 r.$$

или

$$r^2 - \frac{U_0}{qE_1}r + \frac{kq}{E_1} = 0.$$

По теореме Виета произведение корней не зависит от U_0 и равно $l_1 l_2 = l_0^2$, где $l_0 = \sqrt{kq/E_1}$. Таким образом, получаем, что если начальное расстояние l меньше, чем l_0, то расстояние между зарядами будет увеличиваться до максимального значения l_0^2/l, а затем уменьшаться. Если же $l < l_0$, то начальное расстояние и будет максимальным. При $l = l_0$ расстояние между зарядами меняться не будет.

Ответ: максимальное расстояние между зарядами равно l при $l \geqslant \sqrt{kq/E_1}$ и равно kq/lE_1 при $l < \sqrt{kq/E_1}$.